A – 19

Semigrup Legal Dan Beberapa Sifatnya

Oleh :
Soffi Widyanesti P. [1]**, Sri Wahyuni**[2]
[1)] Soffi Widyanesti P.,Jurusan Pendidikan Matematika FKIP Universitas Ahmad Dahlan Yogyakarta dyansofi@rocketmail.com
[2)]Sri Wahyuni, Jurusan Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada Yogyakarta
swahyuni@ugm.ac.id

ABSTRAK

Pada paper ini akan dibahas mengenai latar belakang munculnya semigrup non-reguler yang berhubungan dengan beberapa sifat dasar dari semigrup reguler. Salah satu semigrup non regular adalah semigrup legal.

Dari salah satu proposisi mengenai pasangan suatu elemen di semigrup reguler yaitu, S suatu semigrup regular dan $a, b \in S$, berlaku: 1) $(a, b) \in \mathcal{L}$ jika dan hanya jika $(\exists\, a' \in V(a), b' \in V(b)) \ni a'a = b'b$;2) $(a, b) \in \mathcal{R}$ jika dan hanya jika $\left(\exists\, a' \in V(a), b' \in V(a)\right) \ni aa' = bb'$;3) $(a, b) \in \mathcal{H}$ jika dan hanya jika $\exists\, a' \in V(a), b' \in V(b) \ni a'a = b'b$ & $aa' = bb'$. Kemudian akan diperkenalkan pasangan suatu elemen untuk suatu semigrup sebarang yaitu, S suatu semigrup sebarang dan $a, b \in S$ didefinisikan:1)pasangan (a, b) disebut pasangan kanan jika $aba = ba$;2)pasangan (a, b) disebut pasangan kiri jika $aba = ab$. Selanjutnya akan diselidiki hubungan pasangan untuk semigrup sebarang tersebut dengan semigrup reguler.

Dari beberapa proposisi yang menghubungkan antara pasangan kanan dan pasangan kiri dengan semigrup reguler, diperoleh hasil bahwa terdapat suatu semigrup yang elemen-elemennya bukan elemen reguler.

Kata kunci: semigrup reguler, band, pasangan kanan dan kiri, semigrup legal

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu konsep yang dipelajari dalam struktur aljabar yaitu grup. Grup adalah himpunan tak kosong dengan satu operasi biner. Himpunan tak kosong G dengan operasi biner " $*$ " merupakan suatu grup jika terhadap operasi biner " $*$ ", berlaku sifat tertutup, assosiatif, mempunyai elemen identitas, dan setiap elemennya mempunyai invers. Apabila pada suatu grup tidak mengharuskan eksistensi elemen identitas dipenuhi, hal ini berakibat eksistensi setiap elemen yang mempunyai invers menjadi tidak bermakna. Suatu grup G yang mempunyai sifat demikian dinamakan semigrup. Selanjutnya pada penulisan paper ini semigrup dinotasikan dengan S.

Howie (1976) mendefinisikan semigrup S sebagai himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner yang memenuhi sifat tertutup dan assosiatif. Seperti yang sudah diuraikan sebelumnya aksioma pada semigrup S yaitu, eksistensi invers pada grup G tidak bermakna sehingga $(\forall a \in G)(\exists a^{-1} \in G) \ni aa^{-1} = a^{-1}a = e$ dengan e adalah elemen identitas G yang mengakibatkan $aa^{-1}a = ea = a$. Namun hal ini tidak selalu berlaku pada semigrup S, sehingga hal ini memberikan peluang bagi kita untuk mendefinisikan suatu elemen reguler. Apabila semigrup S berlaku untuk suatu $a \in S$ terdapat $b \in S \ni aba = a$, maka $a \in S$ disebut elemen reguler. Lebih lanjut $\forall a \in S \ \exists b \in S \ni aba = a$. Suatu semigrup S dikatakan semigrup reguler bila setiap elemennya merupakan elemen reguler.

Apabila untuk suatu $a \in S$ terdapat $b \in S$ sedemikian sehingga $aba = a \ dan \ bab = b$, maka b disebut invers dari elemen a dan invers b tersebut belum tentu tunggal. Pada semigrup S, tidak semua elemen $a \in S$ mempunyai invers dan inversnya tunggal. Apabila berlaku $(\forall a \in S)(\exists! \, b \in S) \ni aba = a \ dan \ bab = b$, maka S disebut semigrup invers. Himpunan semua invers dari $a \in S$ dinotasikan dengan $V(a)$.

Selanjutnya, berdasarkan aksioma elemen identitas pada grup G, yaitu $(\forall a \in G)(\exists e \in G) \ ae = ea = a$, diperoleh untuk elemen $(e \in G) \ ee = e$. Hal ini belum tentu berlaku pada semigrup, sehingga memberikan peluang untuk membentuk himpunan elemen-elemen yang memenuhi $ee = e^2 = e$, elemen yang demikian disebut elemen idempotent. Himpunan elemen idempotent dari semigrup S dinotasikan dengan $E(S)$. Jika setiap elemen dari semigrup S adalah idempotent, maka dikatakan S adalah semigrup idempotent atau S disebut Band.

Pada semigrup S terdapat relasi ekuivalensi yang berhubungan dengan ideal pada semigrup. Relasi tersebut dinamakan relasi Green, yang didefinisikan sebagai berikut:

1. $a\mathcal{L}b \quad jika \ dan \ hanya \ jika \ S^1a = S^1b$
2. $a\mathcal{R}b \quad jika \ da \ hanya \ jika \ aS^1 = bS^1$
3. $a\mathcal{J}b \quad jika \ dan \ hanya \ jika \ S^1aS^1 = S^1bS^1$

Pada relasi Green terdapat proposisi mengenai pasangan elemen di semigrup reguler, yaitu: *Misalkan* $a, b \in S$ *S adalah semigrup reguler, maka*

1. $(a, b) \in \mathcal{L}$ *jika dan hanya jika* $(\exists \ a' \in V(a), b' \in V(b)) \ \ni \ a'a = b'b$
2. $(a, b) \in \mathcal{R}$ *jika dan hanya jika* $\left(\exists \ a' \in V(a), b' \in V(a)\right) \ni \ aa' = bb'$
3. $(a, b) \in \mathcal{H}$ *jika dan hanya jika* $(\exists \ a' \in V(a), b' \in V(b) \ \ni \ a'a = b'b$
   & $aa' = bb'$ (Howie, 1976)

Hal ini memotivasi munculnya pasangan kiri dan pasangan kanan dari suatu semigrup sembarang. Selanjutnya pada penulisan paper ini akan diselidiki hubungan antara pasangan kanan dan pasangan kiri di semigrup regular yang kemudian memunculkan definisi mengenai semigrup legal, suatu semigrup non-reguler.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang masalah, maka dapat dirumuskan permasalahan sebagai berikut:

1. Munculnya Semigrup legal
2. Beberapa sifat yang dimiliki semgrup Legal.

1.3 Tujuan Penulisan

Sesuai dengan permasalahan yangtelah dirumuskan, maka tujuan dari penulisan ini adalah:

1. Mempelajari tentang munculnya semigrup legal
2. Mempelajari tentang sifat yang ada pada semigrup legal.

1.4 Manfaat Penulisan

Manfaat yang diharapkan dari penulisan ini adalah:

1. Dapat memahami semigrup legal

II. PEMBAHASAN

Salah satu proposisi mengenai pasangan elemen pada semigrup reguler:

Proposisi 2.1 (Howie, 1976) *Misalkan* $a, b \in S$ S *adalah semigrup reguler, maka*

1. $(a, b) \in \mathcal{L}$ *jika dan hanya jika* $(\exists\, a' \in V(a), b' \in V(b)) \ni a'a = b'b$

2. $(a, b) \in \mathcal{R}$ *jika dan hanya jika* $\left(\exists\, a' \in V(a), b' \in V(a)\right) \ni aa' = bb'$

3. $(a, b) \in \mathcal{H}$ *jika dan hanya jika* $(\exists\, a' \in V(a), b' \in V(b) \ni a'a = b'b$
$\& \ aa' = bb'$

Terilhami dari proposisi diatas, kita menganggap elemen – elemen dari semigrup S memenuhi hukum-hukum kereguleran. Berikut akan diperkenalkan konsep pasangan kanan dan pasangan kiri.

Definisi 2.2 (Kar Ping Shum, 2000) *Diberikan* S *suatu semigrup sebarang untuk* $a, b \in S$ *didefinisikan:*

i) Pasangan (a, b) *disebut pasangan kanan jika* $aba = ba$

ii) Pasangan (a, b) *disebut pasangan kiri jika* $aba = ab$

Pada teorema selanjutnya akan diselidiki hubungan antara pasangan kanan dan pasangan kiri di semigrup reguler.

Teorema 2.3 (Kar Ping Shum, 2000) *Jika S semigrup regular dan $a, b \in S$, maka kondisi dibawah ini ekuivalen*

1. *Untuk setiap $a, b \in S$ berlaku salah satu yaitu:*
   i) (a, b) dan (b, a) keduanya pasangan kanan, atau
   ii) (a, b) dan (b, a) keduanya pasangan kiri
2. *Untuk setiap $a, b \in S$ berlaku salah satu yaitu:*
   i) (a, b) pasangan kanan, atau
   ii) (a, b) pasangan kiri.
3. *S adalah band dan setiap kelas $\mathcal{D}$ dari S adalah band nol kanan atau band nol kiri.*

Bukti:

$(1 \Longrightarrow 2)$ Diketahui (a, b) dan (b, a) adalah pasangan kanan maka terlihat bahwa (a, b) merupakan pasangan kanan. Hal ini juga berlaku untuk (a, b) dan (b, a) adalah pasangan kiri.

$(2 \Longrightarrow 3)$

Diketahui: (a, b) adalah pasangan kanan atau (a, b) pasangan kiri

Akan ditunjukkan:

S adalah band

Diketahui (a, b) pasangan kanan, sehingga berlaku $aba = ba$

Ambil $a \in S$ dan $a' \in V(a)$ dengan kata lain berlaku $aa'a = a \; dan \; a'aa' = a'$. Kemudian jelas bahwa aa', $a'a \in E(S)$.

Diketahui bahwa $aa'a = a$ dan $aa'a = a'a$, sehingga $a = aa'a = a'a$. Karena $a'a \in E(S)$ dan $a = a'a$ maka $a \in E(S)$, sehingga S adalah suatu band. Hal ini juga berlaku untuk (a, b) pasangan kiri.

Setiap kelas $\mathcal{D}$ dari S adalah band nol kanan atau band nol kiri.

Karena S adalah suatu band menurut A.H Clifford (1954) maka S adalah semilatis dari band rectangular. Tulis $S = \cup_{\alpha \in Y} \mathbb{D}_\alpha$ dimana tiap $\mathbb{D}_\alpha$ adalah band rectangular dan Y adalah semilatis. Klaim bahwa tiap $\mathbb{D}_\alpha$ adalah band nol kanan atau band nol kiri.

Ambil $a \in \mathbb{D}_\alpha$, jika (a, b) adalah pasangan kanan untuk suatu $b \in \mathbb{D}$ dengan $b \neq a$ maka untuk semua $x \in \mathbb{D}$ (a, x) adalah pasangan kanan, seblaiknya dapat ditemukan juga $c \in \mathbb{D}$ dengan $c \neq a$ dimana (a, c) bukan pasangan kanan. Hal ini berarti (a, c) adalah pasangan kiri yang berlaku $aca = ac$ dan $a, c \in \mathbb{D}_\alpha$ maka berlaku $aca = a \; dan \; cac = c$ dan juga berlaku $ca = cac$ jadi diperoleh $ac = a$ dan $ca = c$.

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Demikian pula berlaku untuk (a, b) pasangan kanan dan $\mathbb{D}_\alpha$ suatu banad rectangular, diperoleh $aba = ba\ dan\ aba = a$ serta $bab = ab\ dan\ bab = b$ atau dengan kata lain diperoleh $ba = a\ dan\ ab = b$.

Disamping itu ada beberapa kasus yaitu:

i) jika (b, c) adalah pasangan kanan maka $bcb = cb$ karena $b, c \in \mathbb{D}_\alpha$ diperoleh $b = cb\ dan\ c = bc$. Kemudian diperoleh $c = ca = cba = ba = a$.terjadi kontradiksi karena $c \neq a$.

ii) jika (b, c) adalah pasangan kiri maka $bcb = bc$ karena $b, c \in \mathbb{D}_\alpha$ diperoleh $b = bc\ dan\ c = cb$. Kemudian diperoleh $b = bc = abc = ac = a$, terjadi kontradiksi karena $b \neq a$.

Diperoleh bahwa $x \in \mathbb{D}_\alpha$, (a, x) pasangan kanan, sehingga $\mathbb{D}_\alpha$ adalah suatu band nol kanan.

$(3 \Longrightarrow 1)$

Diketahui: S adalah band dan Setiap kelas $\mathcal{D}$ dari S adalah band nol kanan atau band nol kiri. Kemudian kita misalkan $S = \cup_{\alpha \in Y} \mathbb{D}_\alpha$ dekomposisi semilatis $\mathbb{D}_\alpha$ pada semilatis Y, dengan $\mathbb{D}_\alpha$ adalah band nol kanan atau kiri. $\forall e, f \in S$ kita dapatkan $e \in \mathbb{D}_\alpha\ dan\ f \in \mathbb{D}_\beta\ untuk\ \alpha, \beta \in Y$. Dengan struktur semilatsi $\cup_{\alpha \in Y} \mathbb{D}_\alpha$maka diperoleh $ef, fe \in \mathbb{D}_\gamma\ dengan\ \gamma = \alpha\beta$. Jika $\mathbb{D}_\gamma$ band nol kanan maka diperoleh $efe = effe = (ef)(fe) = fe$ dan $fef = feef = (fe)(ef) = ef$ dengan kata lain $(e, f) dan\ (f, e)$ adalah pasangan kanan. JIka $\mathbb{D}_\gamma$ band nol kiri diperoleh $efe = (ef)(fe) = ef\ dan\ fef = (fe)(ef) = fe$ dengan kata lain $(e, f) dan\ (f, e)$ adalah pasangan kiri.

Proposisi 2.4 (Kar Ping Shum, 2000) *Jika S semigrup yang memenuhi* $S^2 \subseteq E(S)$ *maka kondisi (1) dan (2) pada teorema 3.4 ekuivalen*.

Bukti.

$(1 \Longrightarrow 2$)Diketahui $(a, b)\ dan\ (b, a)$ pasangan kanan

Akan ditunjukkan (a, b) pasangan kanan

Karena $(a, b)\ dan\ (b, a)$ kedua-duanya pasangan kanan maka (a, b) pasangan kanan juga.

$(2 \Longrightarrow 1)$ Diketahui (a, b) pasangan kanan dan $S^2 \subseteq E(S)$

Akan ditunjukkan $(a, b)\ dan\ (b, a)$ kedua-duanya pasangan kanan.

Dari yang diketahui terlihat bahwa (a, b) pasangan kanan. Sekarang akan ditunjukan bahwa (b, a) pasangan kanan juga. Diketahui (a, b) pasangan kanan berarti $aba =$

$ba \quad \forall a,b \in S$ karena $S^2 \subseteq E(S)$ maka $\in S^2 \subseteq E(S)$. Diperoleh bahwa $ab \in E(S)$ berarti $(ab)^2 = ab$.

$bab = (ba)b$

$\quad = (aba)b$ (dari (a,b) pasangan kanan)

$\quad = (ab)^2$

$\quad = ab$

Diperoleh $bab = ab$ dengan kata lain (b,a) adalah pasangan kanan

Untuk $(a,b)\ dan\ (b,a)$ keduanya pasangan kiri ⟺ (a,b) pasangan kiri pembuktiannya trivial.

Jadi diperoleh 1 ⟺ 2

Dari proposisi diatas kita dapat menganggap bahwa semigrup non-reguler S memenuhi kondisi (1) pada teorema 3.4

Dari sini maka didefinisikan mengenai semigrup legal

Definisi 2.5 (Kar Ping Shum, 2000) *Suatu Semigrup S sebarang disebut semigrup legal jika kondisi (1) pada teorema 3.4 dipenuhi, yaitu untuk semua* $a,b \in S$ *berlaku salah satu yaitu:*

i) $(a,b)\ dan\ (b,a)$ *keduanya adalah pasangan kanan jika* $aba = ba\ dan\ bab = ab$ *, atau*

ii) $(a,b)\ dan\ (b,a)$ *keduanya adalah pasangan kiri berlaku* $aba = ab\ dan\ bab = ba$

Berikut ini adalah contoh yang menunjukkan adanya semigrup legal dimana semigrup ini bukan semigrup reguler.

Contoh 2.6

Misal $S = \{a,b,e,f,g,h,w\}$ adalah himpunan dengan table cayley berikut

.	a	e	f	b	g	h	w
a	e	e	f	w	w	w	w
e	e	e	f	w	w	w	w
f	e	e	f	w	w	w	w
b	w	w	w	g	g	g	w
g	w	w	w	g	g	g	w
h	w	w	w	h	h	h	w
w	w	w	w	w	w	w	w

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

S adalah semigrup legal karena setiap anggota dari S merupakan pasangan kanan atau pasangan kiri, yaitu:

i) $a, b \in S$ akan ditunjukkan bahwa (a, b) dan (b, a)merupakan pasangan kanan,yaitu $aba = ba$ dan $bab = ab$, dari table cayley diatas diperoleh $aba = (ab)a = wa = a$ sedangkan $ba = w$, jadi $aba = ba$. Selain itu $bab = (ba)b = wb = w$ dan $ab = w$ jadi $bab = ab$.

ii) $a, e \in S$ akan ditunjukkan bahwa (a, e) dan (e, a) merupakan pasangan kiri, yaitu $aea = ae$ dan $eae = ea$, dari table cayley diatas diperoleh $aea = (ae)a = ea = e$ sedangkan $ae = e$, jadi $aea = ae$. Selain itu $eae = (ea)e = ae = e$ dan $ea = e$ jadi $eae = ea$.

iii) $a, f \in S$ akanditunjukkan bahwa (a, f) dan (f, a) merupakan pasangan kanan, yaitu $afa = fa$ dan $faf = af$, dari table cayley diatas diperoleh $afa = (af)a = fa = e$ sedangkan $fa = e$, jadi $afa = fa$. Selain itu $faf = (fa)f = ef = f$ dan $af = f$ jadi $faf = af$.

iv) $a, g \in S$ akan ditunjukkan bahwa (a, g) dan (g, a) merupakan pasangan kanan, yaitu $aga = ga\ dan\ gag = ag$, dari table cayley diatas diperoleh $aga = (ag)a = wa = w$ sedangkan $ga = w$, jadi $aga = ga$. Selain itu $gag = (ga)g = wg = w$ dan $ag = w$ jadi $gag = ag$.

v) $a, h \in S$ akan ditunjukkan bahwa (a, h) dan (h, a) merupakan pasangan kanan, yaitu $aha = ha$ dan $hah = ah$, dari table cayley diatas diperoleh $aha = (ah)a = wa = w$ sedangkan $ha = w$, jadi $aha = ha$. Selain itu $hah = (ha)h = wa = w$ dan $ha = w$ jadi $hah = ah$

vi) $a, w \in S$ akan ditunjukkan bahwa (a, w) dan (w, a) merupakan pasangan kiri, yaaitu $awa = aw$ dan $waw = wa$, dari table cayley diatas diperoleh $awa = (aw)a = wa = w$ sedangkan $aw = w$, jadi $awa = aw$. Selain itu $waw = (wa)w = ww = w$ dan $wa = w$ jadi $waw = wa$.

vii) $e, f \in S$ akan ditunjukkan bahwa $(e, f0\ dan\ (f, e)$ merupakan pasangan kanan, yaitu $efe = fe\ \ dan\ fef = ef$, dari table cayley diatas diperoleh $efe = (ef)e = fe = e$ dan $fe = e$, jadi $efe = fe$. Selain itu $fef = (fe)f = ef = f\ \ dan\ ef = f$ jadi $fef = ef$.

viii) $e, b \in S$ akan ditunjukkan bahwa $(e, b) dan\ (b, e)$ merupakan pasangan kanan, yaitu $ebe = be\ \ dan\ beb = eb$, dari table cayley diatas diperoleh $ebe = (eb)e = we = w$ dan $be = w$ jadi $ebe = be$. Selain itu $beb = (be)b = wb = w$ dan $eb = w$ jadi $beb = eb$.

ix) $e, g \in S$ akan ditunjukkan bahwa $(e, g)\ dan\ (g, e)$ merupakan pasangan kiri, yaitu $ege = eg\ \ \ dan\ geg = ge$, dari table cayley diatas diperoleh $ege = (eg)e = we = w$ dan $eg = w$, jadi $ege = eg$. Selain itu $geg = (ge)g = wg = w$ dan $ge = w$, jadi $geg = ge$.

x) $e, h \in S$ akan ditunjukkan bahwa $(e, h)\ \ dan\ \ (h, e)$ merupakan pasangan kanan yaitu $ehe = he\ \ dan\ heh = eh$, dari table cayley diatas diperoleh $ehe = (eh)e = we = w$ dan $he = w$, jadi $ehe = he$. Selain itu $heh = (he)h = wh = w$ dan $eh = w$, jadi $heh = eh$.

xi) $e, w \in S$ akan ditunjukkan bahwa $(e, w)\ dan\ (w, e)$ merupakan pasangan kiri, yaitu $ewe = ew\ \ dan\ \ wew = we$, dari tabel cayley diatas diperoleh $ewe = (ew)e = we = w$ dan $ew = w$, jadi $ewe = ew$. Selain itu $wew = (we)w = ww = w$ dan $we = w$, jadi $wew = we$.

xii) $f, b \in S$ akan ditunjukkan bahwa $(f, b)\ dan\ (b. f)$ merupakan pasangan kiri, yaitu $fbf = fb\ \ \ dan\ \ bfb = bf$, dari table cayley diatas diperoleh $fbf = (fb)f = wf = w$ dan $fb = w$, jadi $fbf = fb$. Selain itu $bfb = (bf)b = wb = w$ dan $bf = w$, jadi $bfb = bf$.

xiii) $f, g \in S$ akan ditunjukkan bahwa $(f, g)\ \ dan\ \ (g, f)$ merupakan pasangan kiri, yaitu $fgf = fg\ \ \ dan\ gfg = gf$, dari table cayley diatas diperoleh $fgf = (fg)f = wf = w$ dan $fg = w$, jadi $fgf = fg$. Selain itu $gfg = (gf)g = wg = w$ dan $gf = w$, jadi $gfg = gf$.

xiv) $f, h \in S$ akan ditunjukkan bahwa $(f, h)\ dan\ (h, f)$ merupakan pasangan kanan, yaitu $fhf = hf\ \ dan\ hfh = fh$, dari table cayley diatas diperoleh $fhf = (fh)f = wf = w$ dan $hf = w$, jadi $fhf = hf$. Selain itu $hfh = (hf)h = wh = w$ dan $fh = w$, jadi $hfh = fh$.

xv) $f, w \in S$ akan ditunjukkan bahwa $(f, w)\ dan\ (w, f)$ merupakan pasangan kanan, yaitu $fwf = wf\ \ dan\ wfw = fw$, dari table cayley diatas diperoleh $fwf = (fw)f = wf = w$ dan $wf = w$, jadi $fwf = wf$. Selain itu $wfw = (wf)w = ww = w$ dan $fw = w$, jadi $wfw = fw$.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

xvi) $b, g \in S$ akan ditunjukkan bahwa $(b, g)\ dan\ (g, b)$ merupakan pasangan kanan, yaitu $bgb = gb\ \ dan\ gbg = bg$, dari table cayley diatas diperoleh $bgb = (bg)b = gb = g$ dan $gb = g$, jadi $bgb = gb$. Selain itu $gbg = (gb)g = gg = g$ dan $bg = g$, jadi $gbg = bg$.

xvii) $b, h \in S$ akan ditunjukkan bahwa $(b, h)\ dan\ (h, b)$ merupakan pasangan kiri, yaitu $bhb = bh\ \ dan\ hbh = hb$, dari table cayley diatas diperoleh $bhb = (bh)b = gb = g\ dan\ bh = g$, jadi $bhb = bh$. Selain itu $hbh = (hb)h = hh = h\ dan\ hb = h$, jadi $hbh = hb$.

xviii) $b, w \in S$ akan ditunjukkan bahwa $(b, w)\ dan\ (w, b)$ merupakan pasangan kanan, yaitu $bwb = wb\ dan\ wbw = bw$, dari table cayley diatas diperoleh $bwb = (bw)b = wb = w\ dan\ wb = w$, jadi $bwb = wb$. Selain itu $wbw = (wb)w = ww = w\ dan\ bw = w$, jadi $wbw = bw$.

xix) $g, h \in S$ akan ditunjukkan bahwa $(g, h) dan\ (h, g)$ merupakan pasangan kiri, yaitu $ghg = gh\ \ dan\ hgh = hg$, dari table cayley diatas diperoleh $ghg = (gh)g = gg = g\ dan\ gh = g$, jadi $ghg = gh$. Selain itu $hgh = (hg)h = hh = h\ \ dan\ hg = h$, jadi $hgh = hg$.

xx) $g, w \in S$ akan ditunjukkan bahwa $(g, w)\ dan\ (w, g)$ merupakan pasangan kiri, yaitu $gwg = gw\ dan\ wgw = wg$, dari table cayley diatas diperoleh $gwg = (gw)g = wg = w\ dan\ gw = w$, jadi $gwg = gw$. Selain itu $wgw = (wg)w = ww = w\ dan\ wg = w$, jadi $wgw = wg$.

xxi) $h, w \in S$ akan ditunjukkan bahwa $(h, w)\ dan\ (w, h)$ merupakan pasangan kanan, yaitu $hwh = wh\ dan\ whw = hw$, dari table cayley diatas diperoleh $hwh = (hw)h = wh = w\ dan\ wh = w$, jadi $hwh = wh$. Selain itu $whw = (wh)w = ww = w\ dan\ hw = w$, jadi $whw = hw$.

Dari I s/d xxi terlihat bahwa $(S, \cdot)$ merupakan semigrup legal dan $(S, \cdot)$ adalah semigrup non-reguler, yaitu a dan b di S adalah elemen non-reguler karena untuk setiap anggota S jika dioperasikan dengan a atau b maka hasilnya bukan a atau b. Misal $aea = ea = e$ jadi $aea \neq a$ begitu pula dengan $bgb = gb = g$ sehingga $bgb \neq b$. Jadi, a dan b bukan elemen reguler.

Teorema 2.7 (Kar Ping Shum, 2000) *Diketahui S semigrup Legal, maka sifat berikut berlaku:*

i. $S^2 \subseteq E(S)$

ii. Semua elemen regular di S adalah elemen idempotent

iii. $E(S)$ adalah semilatis dari band nol kanan dan band nol kiri

Bukti.

Diketahui S semigrup Legal

i. Ambil $a, b \in S$ maka $(a,b)\ dan\ (b,a)$ keduanya adalah pasangan kanan sehingga berlaku $aba = ba\ dan\ bab = ab$

Maka $(ab)^2 = abab$

$= (aba)b$

$= (ba)b$

$= ab$ …………………………………… (1)

Kemudian untuk $(a,b)\ dan\ (b,a)$ keduanya adalah pasangan kiri berlaku $aba = ab\ dan\ bab = ba$

Maka $(ab)^2 = abab$

$= a(bab)$

$= a(ba)$

$= ab$ ………………………………………..(2)

Dari (1) dan (2) maka diperoleh $(ab)^2 = ab$ untuk setiap $a, b \in S$, sehingga $S^2 \subseteq E(S)$.

ii. Ambil $a \in S$, a adalah elemen regular di S berarti $\exists a' \in V(a)$ sehingga berlaku $aa'a = a$ dan $a'aa' = a'$ dan $aa', a'a \in E(S)$

$a \in S$, untuk S suatu semigrup legal, berarti $aa'a = aa'$ dan $a'aa' = a'a$ atau $aa'a = a'a$ dan $a'aa' = aa'$. Diperoleh bahwa $aa'a = a$dan $aa'a = aa'$ dengan kata lain $aa' = a$ atau $a \in E(S)$, sehingga semua elemen reguler di S adalah suatu elemen idempoten.

iii. Diketahui S adalah semigrup legal, berarti $E(S)$ merupakan suatu band. Karena $E(S)$ merupakan band maka berdasarkan teorema 3.4(3) $E(S)$ merupakan semilatis dari band nol kanan atau band nol kiri.

III. Kesimpulan

Dari definisi tentang pasangan kanan dan pasangan kiri pada suatu semigrup sembarang yaitu untuk S suatu semigrup sebarang dan $a, b \in S$ berlaku:1)Pasangan (a,b) disebut pasangan kanan jika $aba = ba$ dan ii)Pasangan (a,b) disebut pasangan kiri jika $aba = ab$. Jika S semigrup yang memenuhi $S^2 \subseteq E(S)$ maka

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

i)(a, b) dan (b, a) keduanya pasangan kanan atau ii)(a, b) dan (b, a) keduanya adalah pasangan kiri berlaku $aba = ab$ dan $bab = ba$.

IV. Daftar Pustaka

[1] Howie, J.M.: An Introuction To Semigroup Theory, Oxford University Press, 1976

[2] Kar Ping Shum.: On Legal Semigroups, Southeast Asian Bulletin Of Mathematics 24, 455-462, 2000

[3] Clifford, A.H and Prreston, G.B: The Algebraic Theory Of Semigroups, Vol. I, Math. Surveys Of The American Math.Soc. 7, Providence, R.I., 1961

[4] Clifford, A.H.:Bands Of Semigroups, Proc. Amer.Math.Soc. 5, 499-504 (1954)